岩沢inv.λの零化について (代数的整数論)

赤川, 安正

数理解析研究所講究録
230巻 1975年 95-100

岩沢 inv. λ の零化について

奈良女大 理　赤川安正

ℓ を素数とし，$\zeta_n = \exp(2\pi i/\ell^n)$；$n = 1, 2, \cdots$ とおく．体の代数拡大 K/F は $K \subset F(\zeta_\infty) = F(\zeta_n \mid n = 1, 2, \cdots)$ のとき ℓ-cyclotomic 拡大と呼び，特に K/F が局所体の有限次代数拡大であって $^\forall\zeta_n \in F \Rightarrow \zeta_n \in N_{K/F} K^\times$ がみたされるとき，K/F を（有限次）Γ'-拡大という．いくつかの有限次 Γ'-拡大$/F$ の合併体を Γ'-拡大という．有限次代数体 F に対して，F_∞/F を（unique な）ℓ-cyclotomic $\mathbb{Z}_\ell$-拡大，F_i/F は次数が ℓ^i の F_∞/F の部分拡大体とする．

$$\begin{cases} F_{cyt}/F = \text{局所 } \ell\text{-cyclotomic な極大アーベル } \ell\text{-拡大} \\ F_{\Gamma'}/F = \quad \text{〃} \quad \Gamma' \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \end{cases}$$

と書きあらわすこととし，$F_{\infty\, cyt} = \bigcup_{\forall n} F_{n\, cyt}$，$F_{\infty\, \Gamma'} = \bigcup_{\forall n} F_{n\, \Gamma'}$ とおく．

注意 1　$(p, \ell) = 1$ のとき，局所体 $F_\mathfrak{p}$ につい

では，l-cyclotomic 拡大，Γ'-拡大，不分岐拡大，は同じものである．

注意２　局所アーベル l-拡大 $K_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$ が Γ'-拡大であるとは，$K_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$ を含む $F_{\mathfrak{p}}$ の多重 $\mathbb{Z}_l$-拡大が存在することと同値である．$\mathfrak{p}=\mathfrak{l}\,|\,l$ のとき，$F_{\mathfrak{l}}$ の極大アーベル Γ'-l-拡大は $[F_{\mathfrak{l}}:\mathbb{Q}_l]+1$ 重 $\mathbb{Z}_l$-拡大である．

注意３　素イデアル (l) が $F_\infty/\mathbb{Q}$ で分解せず，また $F_n/\mathbb{Q}$ $(\forall n\geq 1)$ で (l) の素因子が常に主因子であるとき（例えば $F/\mathbb{Q}$ が l-cyclotomic のとき），F_{cyt} $=$（極大不分岐アーベル l-拡大$/F$）$\cup F_\infty$ であり　また $F_{\Gamma'}$ は (l) の素因子以外はすべて不分岐な F のアーベル l-拡大にほかならない．

以下 $F\not\ni \zeta_1$，$k=F(\zeta_1)=F(\zeta_{\nu_0})\subsetneqq F(\zeta_{\nu_0+1})$ とする $(\nu_0\geq 1)$．$\Lambda=\mathbb{Z}_l[[T]]$ を l-進整数環 $\mathbb{Z}_l$ 上の巾級数環とし，可換群 $X=G(F_{\infty\,cyt}/F_\infty)$，$Y=G(F_{\infty\,\Gamma'}/F_\infty)$ を Λ-加群とみなすことにする．ただし $G(k_\infty/k)$ の元 $\gamma_0:\zeta_n\mapsto\zeta_n^{\,1+l^{\nu_0}}$ $(\forall n\geq 1)$ によって惹き起される $G(kF_{\infty\,cyt}/F)$ の内部自己同型で X の元の $(1+T)$-倍を定義し，Y についても同様である．$\lambda=\dim_{\mathbb{Q}_l}X\otimes_{\mathbb{Z}_l}\mathbb{Q}_l$ が，X の岩沢 inv.λ である．

$F_{\infty\,cyt}/F_\infty$ や $F_{\infty\mathfrak{p}'}/F_\infty$ の部分拡大のガロワ群にも，上記のことから自然に Λ が作用していると考えられる．さて，m，n を

$$(1)\quad \begin{cases} \nu_0 \geqq m \geqq \nu_0/2 \geqq n \\ 2(n+\nu_0-m) \leqq m \end{cases}$$

をみたす自然数とし

$\Omega = k_{\mathfrak{p}'}^{\;G(k_{\mathfrak{p}'}/k)^{\ell^{\nu_0+2n}}}$

($=$ $k_{\mathfrak{p}'}$ の部分体で $G(k_{\mathfrak{p}'}/k)^{\ell^{\nu_0+2n}}$ に対応（ガロワ対応で）するもの)

とおく．

定理 1　$\nu_0 \geqq 2$ と仮定する．条件 (1) の外に，次の条件をみたす様な ℓ^m-次の F_{cyt}/F に含まれる巡回拡大 K/F が存在するとする：

(2)　$K \cap F_1 = F$

(3)　$F_{\mathfrak{p}'}/F$ の巡回部分拡大 K_1/F で，$K_1 \supset K$ かつ $G(K_1k/k)$ が $G(\Omega/k)$ の直積因子になっているものが存在する．

いま，二つの同型 $G(KF_n/F) \xrightarrow{\sim} G(K/F) \times G(F_n/F)$ (projections によって定まる自然同型) と $G(K/F) \xrightarrow{\sim} \Lambda/(\ell^m, T)$ を固定しておく．このとき，$F_{n\,cyt}/F$ に

は KF_n を含む部分ガロワ ℓ-拡大 L/F が存在して

$$\begin{array}{ccc} G(L/F) & \simeq & (\Lambda/(\ell^m, \ell^n T, T^2))\cdot G(F_n/F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(KF_n/F) & \simeq & (\Lambda/(\ell^m, T)) \times G(F_n/F) \end{array}$$

が可換になる．（ただし，上右の群は半直積であり，二つの縦写像は自然なもの）

この定理の証明には，“「埋蔵問題の作る群」の上での巾剰余の相互法則”を必要とする [1]．

$(1+T)^{\ell^i}-1=\omega_i\in\Lambda$；$i\geqq 0$，$\mathbb{Z}_\ell[[\omega_i]]=\Lambda_i\subset\Lambda$ とおく．特に $\omega_0=T$，$\Lambda_0=\Lambda$ である．X はそのまま Λ_i-加群とみなせる．一方 ℓ^{e_0} を $\mathrm{Tor}\,X=\{x\in X \mid nx=0 \text{ for some } n\neq 0\in\mathbb{Z}\}$ の exponent とする：$\ell^{e_0}\,\mathrm{Tor}\,X=0$．$X$ は有限生成なので $0\leqq e_0<\infty$．このとき，次の Lemma が得られる．

Lemma 十分大きな $n_0\geqq 0$ があって，任意の Λ_i-準同型 $X\to\Lambda_i/(\ell^{e_0+1},\omega_i^2)$ は $i\geqq n_0$ のとき決して surjective でない．

従って，十分大きな i をとって定理1の F を F_i でおき

かえる（従って ν_0 を ν_0+i でおきかえる）とき，F_i 上には定理1の K/F が存在しない．このことから次の定理2が得られる．ここで勿論 $\mathrm{Tor}_\Lambda Y=\{y\in Y\mid f(T)y=0 \text{ for some } f(T)\in\Lambda\}$.

定理 2　$F\ni\zeta_1$ とする．このとき

$$\lambda\left(G(F_{\infty\,cyt}{}^{\mathrm{Tor}_\Lambda Y}/F_\infty)\right)=0$$

であり，また

$$F_{\infty\,cyt}{}^{(\mathrm{Tor}\,X+\ell X)}\subset F_{\infty\,p'}{}^{\mathrm{Tor}_\Lambda Y}$$

いま $F_{\infty\,unram}/F_\infty$ を極大不分岐アーベル ℓ-拡大とすると（従って $F_{\infty\,unram}\supset F_{\infty\,cyt}$），特に F が総実のときには $Y=\mathrm{Tor}_\Lambda Y$，$[F_{\infty\,unram}:F_{\infty\,cyt}]<\infty$ なので（[2]），次の定理も得られる．

定理 3　　F が総実のとき

$$\lambda\left(G(F_{\infty\,unram}/F_\infty)\right)=0.$$

なお，定理のくわしい証明は，Crelle Journal に発表の予定である．

参考文献

[1] Y. Akagawa : A power-residue-symbol on the module of embedding problem and a reciprocity law, to appear in Ann. of Math.

[2] 〃 : On a relation between Galois groups of some two maximal abelian extensions over an algebraic number field with given local conditions, ibid.

[3] K. Iwasawa : On the theory of cyclotomic field, Ann. of Math. 70 (1959) 530-561

[4] 〃 : On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields, Ann. of Math. 98 (1973) 246-326

[5] H. S. Vandiver : Fermat's last theorem and the second factor in the cyclotomic class number, Bull. Am. Math. Soc. 40 No 2 (1934) 118-126